

ELPSA – Kerangka Kerja untuk Merancang Pembelajaran Matematika

Tom Lowrie¹, Sitti Maesuri Patahuddin²

^{1,2}Faculty of Education, Science, Technology and Mathematics, University of Canberra,
ACT 2601 Australia
e-mail: Sitti.Patahuddin@canberra.edu.au

Abstract. This paper describes a framework for a mathematics lesson design called ELPSA. It is comprised of five learning components, namely: Experience, Language, Pictorial, Symbolic and Applications. This framework provides assistance for students to make sense of mathematics ideas in classrooms, through sequenced activities that draw of students' personal experiences, encourage multiple forms of representation and apply mathematics knowledge to new experiences. This paper explains the theory that underpins the framework, and highlights the manner in which the respective components promote mathematics thinking. It concludes with a demonstration on how the ELPSA framework can be used in the process of designing lessons for Number Patterns

Keywords: ELPSA, framework, number patterns

Pendahuluan

Tulisan ini menawarkan satu kerangka kerja ELPSA yang dapat digunakan dalam proses perancangan pembelajaran matematika. Pengembangan kerangka kerja ini berawal dari ide Leibeck (1984) yang mengkaji tentang bagaimana seorang anak belajar matematika. Lowrie (1997) mengembangkan ide ini sebagai kerangka dasar dalam pembelajaran pedagogi matematika di universitas. Selanjutnya, kerangka kerja ini digunakan penulis dalam program pengembangan guru matematika Indonesia bekerja sama dengan World Bank. Program ini menghasilkan paket pelatihan geometri yang telah diujicobakan di lima propinsi yaitu DKI Jakarta, Jawa Barat, Jawa Tengah, Sumatera Barat, dan Sulawesi Selatan, tepatnya di 13 MGMP. Paket ini bahkan telah dimanfaatkan oleh P4TK Matematika Yogyakarta dalam proses pengembangan profesi guru-guru matematika Indonesia secara online. Saat ini, kerangka kerja ELPSA digunakan untuk mengembangkan paket pelatihan guru dan rencana pembelajaran matematika dalam program “*Promoting mathematics engagement and learning opportunities for disadvantaged communities in West Nusa Tenggara, Indonesia*”. Pengembangan ini dilakukan penulis bersama pakar pendidikan matematika Indonesia dan guru-guru ahli dari seluruh kabupaten di Nusa Tenggara Barat (NTB).

Kerangka kerja ELPSA menjadi penting untuk konteks Indonesia dengan alasan antara lain: (1) guru-guru di Indonesia dituntut untuk mengembangkan rencana pembelajaran sebagai bagian dari tugas profesinya; (2) kerangka ini telah digunakan dalam proyek Bank Dunia tahun

2012-2014, dan pengembangan ini didasarkan atas kajian analisis kritis pada video-video pembelajaran matematika Indonesia dari TIMSS *video study*. Secara garis besar, temuan ini menunjukkan bahwa pembelajaran matematika di Indonesia kurang menekankan pada penalaran dan pemecahan masalah, menggunakan sedikit waktu, dan menyajikan sedikit materi matematika yang baru pada setiap pembelajaran matematika (Jalal et al., 2009). Analisis video TIMSS juga menunjukkan bahwa pengajaran matematika Indonesia didominasi oleh ceramah, dipengaruhi oleh sajian buku paket (yang kebanyakan bersifat simbolik), dan keterlibatan peserta didik dalam pembelajaran terbatas termasuk dalam hal pengajuan pertanyaan (World Bank, 2010); (3) kerangka ini diharapkan membantu guru memfokuskan perhatian pada elemen-elemen penting untuk membawa peserta didik aktif belajar matematika secara berbobot, memaknai matematika dan menerapkan pengetahuan matematika dalam memecahkan permasalahan yang lebih kompleks; dan (4) kerangka kerja ini dilandasi oleh teori pembelajaran yang telah diterima secara luas oleh kalangan peneliti atau pendidik matematika, yaitu konstruktivis dan sosial.

Kerangka kerja ELPSA terdiri dari lima komponen, yaitu: E (*Experience* = pengalaman); L (*Language* = bahasa yang mendeskripsikan pengalaman); P (*Pictorial* = gambar yang menyajikan pengalaman tersebut); S (*Symbol* = simbol tertulis yang menyatakan pengalaman secara umum atau bersifat general); dan A (*Application* = aplikasi yang berhubungan dengan bagaimana pengetahuan yang telah diperoleh dapat diterapkan dalam bermacam-macam situasi).

Dasar Teoretis

ELPSA dengan elemen *Pengalaman, Bahasa, Gambar, Simbol* dan *Aplikasi* didasarkan pada teori-teori pembelajaran konstruktivisme dan sifatnya sosial. Kerangka ELPSA melihat pembelajaran sebagai suatu proses aktif dimana para peserta didik mengkonstruksi sendiri caranya dalam memahami sesuatu melalui proses berpikir secara individu dan interaksi sosial dengan orang lain. Namun demikian, penting diingat bahwa ELPSA bukan proses yang linier. Pembelajaran adalah proses kompleks yang tidak dapat diprediksi sepenuhnya dan tidak terjadi dalam urutan linear. Dengan demikian, elemen-elemen ELPSA dapat dipikirkan sebagai elemen-elemen yang saling berhubungan dan melengkapi.

Liebeck (1984) menyatakan bahwa matematika adalah bentuk abstrak dari realitas. Dalam realitas ini terjadi suatu urutan kejadian tertentu yang disebut pembentukan konsep yang mengarah pada pemahaman dengan mengajukan model ELPS. Selanjutnya, penulis menambahkan satu komponen *aplikasi* yang berkaitan dengan bagaimana pengetahuan yang telah diperoleh dapat diterapkan pada situasi-situasi yang berbeda.

Kerangka kerja ELPSA didasari pada asumsi bahwa pengalaman (baik yang sifatnya pribadi maupun sosial) adalah pondasi untuk pengenalan kesempatan belajar yang baru. Dimensi sosial pada komponen *pengalaman* ini sangat penting. Sejumlah pakar pendidikan menekankan hal yang sama (Cobb, 1988; Lave & Wenger, 1991; Lerman, 2003; Wenger, 1999). Ide pokok dari teori sosial didasarkan pada pernyataan bahwa belajar terjadi dari partisipasi atau keterlibatan aktif dari pelajar. Sebagai contoh, Wenger (1999) mengindikasikan bahwa pemahaman konsep itu bermakna jika dibangun dan dikaitkan dengan pengalaman hidup seseorang atau adanya kesempatan keterlibatan satu sama lain. Artinya, jika praktek pengajaran memungkinkan peserta didik untuk mengembangkan ide-ide matematika yang dikaitkan dengan pengalaman pribadi atau pengetahuan awal mereka, serta terlibat dalam diskusi ide-ide matematika dengan orang lain, maka kemungkinan untuk mengenalkan konsep secara bermakna lebih besar. Pandangan ini pun sering diterapkan dalam pembelajaran matematika realistik (Gravemeijer, 2010; Heuvel-Panhuizen, 2003; Widjaja, Fauzan, & Dolk, 2010).

Fondasi sosial tampak jelas pada komponen *bahasa*, dimana bahasa digunakan sebagai alat pembelajaran. Teori-teori sosial menunjukkan pentingnya pengalaman difasilitasi (Vygotsky, 1978), pengaruh budaya terhadap persepsi (Bishop, 1988a, 1988b), dan pengaruh dari bahasa sehari-hari terhadap bahasa matematika (Adler, 1998). Semua ini menjadi dasar pentingnya pemberian kesempatan pada peserta didik dalam membahasakan ide-idenya dan menghubungkan pengalamannya dengan istilah matematika untuk mengupayakan pemaknaan. Kaitan dengan teori psikologi, representasi matematika adalah hal penting untuk membangun pemahaman matematika. Dienes (1959) menyatakan bahwa representasi konkrit dan alat peraga dapat digunakan untuk membantu peserta didik mempelajari ide-ide abstrak. Sebagai contoh, Dienes menggunakan benda konkrit yang digunakan untuk menyatakan penjumlahan dan pengurangan bilangan bilangan cacah. Dalam kerangka kerja ELPSA, bagian ini disebut *pictorial* atau gambar.

Dalam ELPSA, komponen *simbol* melibatkan peserta didik dalam menyajikan, mengkonstruksi, dan memanipulasi informasi dalam bentuk simbol. Simbol meliputi bentuk-bentuk aljabar, barisan bilangan, pernyataan yang menggunakan angka-angka. Menurut De Cruz and De Smedt (2013), simbol-simbol matematika memungkinkan untuk melakukan operasi atau perhitungan-perhitungan yang sebenarnya sulit dilakukan tanpa adanya simbol. Misalnya dalam melakukan perkalian dua bilangan ribuan. Secara teoretis, simbol-simbol matematika akan digunakan secara efektif oleh peserta didik jika mereka memahami konsep berkaitan dengan simbol tersebut. Jika pemahaman mereka terbatas maka akan kesulitan dalam mentransformasi suatu bentuk simbolik ke simbolik lainnya misalnya $a + b = ab$ dan $x + x = x^2$. Komponen simbol dalam ELPSA tetap menghendaki anak untuk berlatih dalam manipulasi simbol.

Sebagaimana Uttal, Scudder, and DeLoache (Uttal, Scudder, & DeLoache, 1997) menyarankan bahwa pengajaran secara eksplisit diperlukan untuk membantu anak menggunakan obyek-obyek matematika dalam bentuk simbolik. Namun tentunya, jika simbol diperkenalkan terlalu cepat maka bisa layaknya seorang anak melihat kata “KUCING” tanpa mengetahui apa yang direpresentasikan dari kata tersebut.

Komponen *aplikasi* sangat penting dalam suatu proses pembelajaran. Suatu studi mendalam yang dilakukan di Brazil memberikan bukti empiris bahwa para pekerja yang berpendidikan rendah dapat memanfaatkan perhitungan matematika dan proses pemecahan masalah secara lebih efektif dibandingkan mereka yang sudah lama belajar matematika di sekolah (Nunes, Schliemann, & Carraher, 1993). Nunes et al, (1993) berpendapat bahwa peserta didik yang hanya dilibatkan dalam proses manipulasi simbol-simbol tidak dapat menggunakan representasi simbol tersebut secara efektif dalam situasi baru. Australia’s Chief Scientist (Chubb, 2014) juga menyatakan bahwa matematika yang dipelajari di sekolah menjadi tidak relevan dengan tempat kerja karena keterampilan-keterampilan matematika yang utama tidak diterapkan di sekolah, khususnya yang berkaitan dengan masalah sehari-sehari. Misalnya menginterpretasi data dan grafik. Penelitian dari Boaler (1998) juga mendukung bahwa pembelajaran yang berbasis aplikasi bermanfaat bagi siswa dalam menyelesaikan masalah-masalah yang baru.

Pengertian ELPSA

Salah satu contoh yang dapat menjadi pintu masuk dari pembicaraan tentang ELPSA, yaitu bagaimana seseorang akhirnya mengetahui konsep “kucing”, seperti ilustrasi berikut.

Seorang anak kecil mungkin mendengar kata kucing ketika suatu makhluk kecil dan berbulu sering berlalu-lalang di hadapannya dan kucing tersebut diberi makan oleh ibu anak tersebut. Proses ini mungkin berlangsung setiap hari selama berbulan-bulan (ini disebut *pengalaman*). Ibu dari anak tersebut mungkin berkata, “Ada yang sudah memberi makan kucing atau belum?”. Pada suatu hari yang luar biasa anak tersebut mungkin akan menyebut kata ‘kucing’ ketika binatang yang berbulu tersebut lewat di hadapannya. Orang tua anak tersebut mungkin memeluknya dan berkata, “Anak pintar. Ya, itu adalah kucing”. Ini disebut pengembangan *bahasa*. Pada suatu hari ketika sedang berjalan-jalan, anak tersebut menyebut ‘kucing’ untuk suatu makhluk yang berbulu coklat. Orang tuanya pun berkata “Bukan, itu bukan kucing, tapi itu anjing. Kamu bisa bilang “anjing”? “ Dua belas bulan kemudian anak kecil tersebut bisa menunjuk di bukunya, gambar kucing dan menyebutnya “kucing”, dan menunjuk pada gambar anjing dan menyebutnya “anjing” (Ini adalah representasi *gambar*). Ketika duduk di kelas satu, anak tersebut dapat menulis kata “kucing” dan memahami bahwa kucing adalah binatang peliharaan yang memiliki warna bulu yang berbeda dan jenis yang berbeda-beda. (Ini adalah representasi *simbol*). Di kelas tiga, anak tersebut memahami bahwa harimau dan jaguar juga merupakan kucing. Jadi, ada kucing liar dan kucing rumah, dan kucing di rumahnya disebut kucing Persia. Inilah yang dikatakan *aplikasi* pengetahuan.

Proses mendapatkan pemahaman tentang kucing ini mungkin membutuhkan waktu bertahun-tahun untuk dapat mengarah pada pemahaman mendalam tentang konsep kucing tersebut. Kenyataannya, komponen aplikasi ini mungkin saja tidak dicapai oleh seseorang selama hidupnya, misalnya tidak bisa membedakan kedua kucing ini: harimau dan jaguar.

Kerangka kerja ELPSA merupakan suatu pendekatan perancangan pembelajaran yang sifatnya bersiklus. Rancangan ini menyajikan ide-ide matematika melalui pengalaman-pengalaman hidup, percakapan matematika, rangsangan visual, notasi simbol, dan aplikasi pengetahuan. Dalam rancangan pembelajaran ini, guru diharapkan mengenalkan konsep dimulai dari apa yang telah diketahui peserta didik. Komponen pertama dari proses perancangan ini adalah pengalaman. Pengalaman mempertimbangkan bagaimana para peserta didik menggunakan matematika selama ini, konsep apa saja yang mereka ketahui, bagaimana mereka dapat memperoleh informasi, dan bagaimana matematika itu telah dialami oleh individu peserta didik baik di dalam maupun di luar kelas. Komponen pengalaman juga melibatkan asesmen karena guru perlu mengetahui apa yang diketahui oleh peserta didik dan informasi baru apa yang perlu dikenalkan untuk membantu pemahaman peserta didik tersebut. Komponen pertama dari ELPSA dapat dikenalkan melalui curah pendapat, diskusi secara umum, menggunakan visual untuk memancing pemikiran, penyajian cerita oleh guru atau pun peserta didik. Sebagai konsekuensinya, pengalaman juga berhubungan dengan pemberian umpan balik dan pemberian latihan soal/*reviuw*.

Komponen kedua dari rancangan ini berhubungan dengan bagaimana bahasa digunakan secara tepat untuk mendorong terjadi pemahaman. Dalam matematika, bahasa matematika bisa bersifat umum maupun khusus. Sebagian bahasa berhubungan dengan *literacy* sedangkan sebagian lainnya khusus berkaitan dengan konsep matematika (misalnya pojok sebagai bahasa sehari-hari dan sudut sebagai bahasa matematika). Komponen kedua dari ELPSA ini secara umum mengikuti pengalaman dan berfokus pada bahasa (baik yang sifatnya umum maupun khusus) yang diperlukan untuk menyajikan ide-ide matematika. Komponen ini juga berhubungan dengan aspek pedagogi, di mana guru perlu memodelkan bahasa yang benar, dan peserta didik perlu didorong menggunakan bahasa yang jelas dalam mendeskripsikan pemahamannya kepada guru dan teman-temannya. Bahasa digunakan guru untuk mendorong berpikir matematika peserta didik. Bahasa matematika harus menjadi perhatian utama dalam elemen ELPSA ini sehingga bahasa matematika yang digunakan tepat dan tidak membingungkan peserta didik.

Sebagai contoh, dalam bilangan bulat, ada satu tanda yang tampak sama tetapi mempunyai makna yang berbeda, yaitu tanda “-“. Tanda tersebut punya dua makna yang berbeda yaitu operasi kurang dan bilangan negatif. Aspek ini bisa menimbulkan kesulitan bagi

peserta didik, sehingga guru dalam hal ini perlu memberi perhatian eksplisit. Jadi “ $2 - (-3)$ ” seharusnya dibaca “dua kurang negatif tiga”, dan guru perlu menghindari untuk mengatakan “dua minus minus 3”. Guru perlu menciptakan kesempatan bagi peserta didik untuk membahasakan alasannya. Sebagaimana dikatakan oleh Kilpatrick dkk. (2001), salah satu cara terbaik bagi peserta didik untuk meningkatkan penalarannya adalah menjelaskan atau berusaha meyakinkan orang lain bahwa jawabannya masuk akal. Ketika peserta didik menjelaskan suatu masalah matematika, mereka pun membangun pemahaman matematikanya, menunjukkan cara penghitungan yang dilakukan, menerapkan pengetahuan yang telah dimiliki, menjelaskan penalarannya kepada orang lain, hingga mereka merasakan bahwa matematika itu bermakna dan bermanfaat. Jadi, kaitannya dengan ELPSA, bahasa digunakan untuk mendorong terjadinya pemahaman.

Komponen ketiga dari kerangka kerja perancangan pembelajaran ini adalah *pictorial*. Komponen ini berhubungan dengan penggunaan representasi visual dalam menyajikan ide-ide. Komponen ini bisa berupa benda kongkrit atau model dan bisa berupa gambar-gambar. Gambar merupakan aspek kritis dari matematika. Secara umum ada dua jenis gambar yang digunakan di dalam kelas: (1) gambar yang dibuat oleh guru atau yang tersedia dalam sumber-sumber belajar dan (2) gambar yang dibuat oleh peserta didik. Contoh dari gambar jenis pertama adalah representasi dari bermacam-macam jajargenjang, termasuk persegi panjang, persegi, dan gambar jajargenjang lain yang tersedia di buku paket. Representasi gambar ini digunakan untuk mendeskripsikan bangun-bangun dimensi dua dalam satu keluarga segiempat. Tipe gambar yang kedua adalah gambar-gambar yang dibuat oleh peserta didik pada kertas, komputer, atau ada dalam bayangan peserta didik. Para peserta didik mungkin membayangkan untuk mentransformasi sebuah persegi menjadi sebuah persegi panjang, atau mereka menggambar diagram untuk menyelesaikan suatu masalah geometri. Gambar-gambar sering digunakan untuk membantu menjembatani pemahaman peserta didik dan menyiapkan rangsangan guna menyelesaikan tugas matematika sebelum pengenalan simbol-simbol. Sebagai contoh, peserta didik diberikan barisan gambar persegi yang menunjukkan suatu pola bilangan kuadrat, atau barisan gambar-gambar kubus yang menunjukkan pola bilangan kubik.

Komponen berikut dari rancangan pembelajaran ini merupakan aspek yang paling umum dan sering digunakan dalam pengajaran, yaitu menggunakan simbol dalam menyajikan ide-ide matematika. Komponen ini kadang-kadang membuat matematika berbeda dari disiplin ilmu lainnya, dan sering merujuk ke bahasa yang universal. Sangat disayangkan karena pengajaran simbol sering menjadi aspek yang paling miskin pengajarannya. Sebagai contoh, kebanyakan peserta didik diajarkan bahwa $6 \times 4 = 4 \times 6$. Meskipun hasilnya adalah 24, 6×4 bermakna ada enam kelompok yang masing-masing terdiri atas empat obyek sedangkan 4×6

merepresentasikan ada empat kelompok yang masing-masing terdiri atas enam obyek. Jika para peserta didik didorong untuk mempelajari perkalian bilangan dengan cara hafalan, mereka mungkin kesulitan memahami apa sebenarnya yang disajikan oleh simbol-simbol matematika. Oleh karena itu, sebelum peserta didik mengetahui bahwa $6 \times 4 = 24$, peserta didik seharusnya difasilitasi menggambar sebuah matriks yang secara gambar menyajikan enam kelompok yang masing-masing beranggotakan empat.

Komponen aplikasi dari suatu rancangan pembelajaran ini menyatakan bagaimana pemahaman simbol dapat diterapkan ke situasi-situasi yang baru. Para peserta didik yang memahami luas persegi sama dengan alas kali tinggi, dapat menerapkan pengetahuannya ke pemahaman yang baru kaitannya dengan volume prisma persegi, yakni sebagai luas alas kali tinggi. Kaitan dengan pola bilangan, anak bisa diberikan masalah yang cukup menantang dan bermakna misalnya menyelidiki pola perkembangan dari kelinci atau pola reproduksi lebah, yang keduanya berkaitan dengan pola bilangan Fibonacci. Komponen aplikasi juga memberikan kesempatan bagi peserta didik untuk melihat bagaimana matematika dapat digunakan di dalam dan di luar konteks sekolah.

Rancangan Pembelajaran Pola Bilangan dari Persepektif ELPSA

Pada bagian ini didemonstrasikan bagaimana menggunakan ELPSA dalam proses perancangan pembelajaran Pola Bilangan. Pembelajaran ini berkaitan dengan Kompetensi Dasar (6.1) Memahami pola dan menggunakannya untuk menduga dan membuat generalisasi (kesimpulan). Berdasarkan kompetensi dasar tersebut, pada akhir pembelajaran ini, peserta didik diharapkan dapat mengenali dan menjelaskan pola dari suatu susunan obyek atau pun bilangan menggunakan kata-katanya sendiri, dan dapat membuat aturan umum (generalisasi).

Pengalaman

Aspek yang harus diperhatikan di sini adalah pengetahuan yang telah dimiliki peserta didik berkaitan dengan tujuan pembelajaran yang telah rencanakan. Sejumlah pertanyaan dapat diajukan antara lain: apakah pola bilangan merupakan materi yang sama sekali baru atau materi yang sudah pernah dipelajari oleh peserta didik? Apakah anak dapat memprediksi suku-suku tertentu berdasarkan pola yang diberikan? Apakah peserta didik memperhatikan hubungan antara bilangan asli (letak suku-suku suatu barisan) dan suku-suku barisan tersebut. Satu hal yang penting dilakukan adalah merujuk pada kurikulum yang sedang digunakan. Misalnya, berdasarkan kurikulum Indonesia, baik KTSP maupun Kurikulum 2013 (K13), anak seharusnya telah dibekali dengan pengalaman belajar matematika berkaitan dengan pola sejak di Sekolah Dasar, antara lain (1) mengamati pola dan melanjutkan pola yang diberikan, misalnya

melanjutkan susunan gambar bangun datar dengan pola tertentu, (2) menentukan bilangan yang tidak diketahui dari suatu susunan bilangan yang berpola, (3) mendeskripsikan barisan bilangan yang dihasilkan dari proses menambah atau mengurangi bilangan yang sama pada suku berikutnya, (4) mendeskripsikan suatu pola bilangan yang merupakan hasil perkalian 2, 3, 5, dan seterusnya, (5) menulis aturan-aturan dari pola bilangan, (6) mengenali bahwa suatu barisan bilangan dapat dilanjutkan hingga tak terhingga banyak unsur-unsurnya, (7) merepresentasikan bilangan yang berpola pada garis bilangan, bahkan (8) peserta didik mungkin telah belajar barisan bilangan yang melibatkan pecahan.

Dalam kurikulum SMP di Indonesia baik KTSP maupun K13, sudah tentu pembelajaran tentang pola bilangan diarahkan ke pemikiran matematika yang lebih tinggi. Dalam hal ini memahami pola dan menggunakannya untuk menduga dan membuat generalisasi (kesimpulan) [KD 6.1] dan menggunakan pola dan generalisasi untuk menyelesaikan masalah [KD 6.2]. Berdasarkan kurikulum tersebut, dapat diinterpretasi bahwa di tingkat SMP, di samping peserta didik dapat mengenali pola dari suatu susunan bilangan, mereka diharapkan mampu membuat generalisasi baik dalam bentuk kata, simbol, maupun grafik. Ini merupakan hal mendasar untuk belajar aljabar yang lebih kompleks. Dengan mengacu pada K13, maka sebelum mempelajari topik ini, peserta didik telah belajar banyak hal berkaitan bentuk-bentuk aljabar dan geometri. Dengan demikian pembelajaran pola bilangan seharusnya dapat diintegrasikan dengan topik-topik tersebut. Di SD, anak mungkin diminta untuk menentukan 3 suku berikut atau suku ke-10 dari barisan bilangan genap 2, 4, 6, 8, ..., ..., ..., dan anak pun mendaftarkan satu persatu. Namun di SMP anak perlu ditantang untuk menentukan bilangan genap misalnya yang ke-100, atau ke-1000 dan memberikan alasan yang kuat. Dengan pertanyaan tersebut anak tidak cukup dengan cara mendaftar satu per satu unsur barisan karena membutuhkan waktu lama. Anak diharapkan dapat mengenali pola dan berpikir untuk membuat generalisasi.

Berdasarkan kajian kurikulum, peserta didik diharapkan telah mempunyai cukup bekal, guru tentunya tidak dapat bersumsi bahwa materi-materi “prasyarat” tersebut telah dikuasai oleh anak. Karena itu, penting bagi guru untuk merancang kegiatan yang akan membantu guru mengetahui sejauh mana pemahaman peserta didik tentang pola bilangan. Salah satu cara adalah pemberian tugas matematika, misalnya Tugas 1 dan Tugas 2 di bawah ini.

Tugas 1:

Cermati pola dari barisan bilangan berikut. Tentukan bilangan yang ke-1000 dari masing-masing barisan bilangan di bawah ini.

- (i) 2, 4, 6, 8, 10,
- (ii) 6, 8, 10, 12, 14,
- (iii) 12, 10, 8, 6, 4, 2,

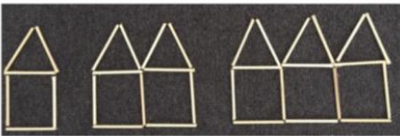
Tugas 1 ini dapat diberikan kepada peserta didik karena barisan bilangan genap tersebut bukan hal baru namun menuntut anak membuat generalisasi agar mampu menentukan suku ke-

1000 dengan mudah. Dengan soal tersebut, guru dapat meminta peserta didik mengamati persamaan dan perbedaan ketiga contoh tersebut dan menjelaskan hasil pengamatannya. Peserta didik diharapkan melihat ciri-ciri kritis antara lain: unsur-unsur dari ketiga barisan itu memuat bilangan bulat genap, selisih dari unsur-unsur yang berdekatan tetap. Selisih dari unsur-unsur berdekatan dari barisan (i) dan barisan (ii) adalah 2 sedangkan barisan (iii) adalah -2. Unsur kritis lainnya bahwa suku atau unsur pertama dari barisan tersebut berbeda-beda. Peserta didik juga mengenali bahwa bilangan-bilangan yang ada pada barisan pertama dan kedua meningkat nilainya sedangkan yang ketiga sifatnya mengecil sehingga mengarah ke bilangan bulat negatif. Contoh ini dipilih untuk mereviu dan memperkuat pemahaman bilangan negatif peserta didik.

Dalam proses penyelesaian soal ini, peserta didik mungkin melakukan cara mereka sendiri, misalnya dengan berusaha mendaftar satu-satu anggota, atau memberi dugaan yang tepat namun belum mampu mengemukakan alasannya secara tepat. Ini adalah kesempatan luas bagi guru untuk mengenali pengetahuan apa yang telah dimiliki mereka. Bukan hal yang aneh jika ada peserta didik yang sudah bisa memberikan jawaban yang lumayan canggih. Pada tahapan ini, guru tidak perlu menekankan pada benar atau salah jawaban peserta didik, melainkan mendorong peserta didik untuk memperjelas jalan pikirannya.

Guru juga dapat menyajikan permasalahan melalui gambar, seperti pada contoh berikut.

Tugas 2:
Perhatikan susunan gambar berikut. Amati secara saksama. Berdasarkan pengamatan Anda, dapatkah Anda menentukan berapa banyak korek api yang Anda butuhkan untuk membuat Gambar ke-30.



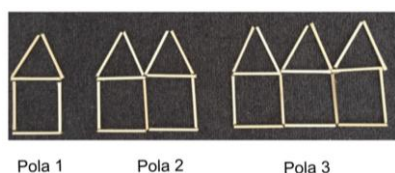
Gbr. 1 Gbr. 2 Gbr. 3

Permasalahan dalam bentuk gambar ini dapat menciptakan kesempatan bagi guru untuk mengetahui kesiapan peserta didik dalam belajar tentang generalisasi sekaligus membantu peserta didik untuk mengkaitkan permasalahan dengan pengalaman atau pengetahuan yang telah dimilikinya.

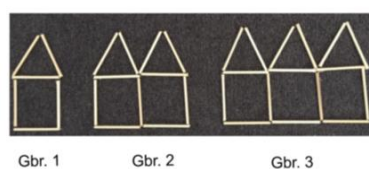
Bahasa

Kaitan dengan bahasa matematika, istilah matematika yang penting diperhatikan dalam pelajaran pola bilangan adalah pengertian pola itu sendiri. Ketika guru bertanya bagaimana polanya maka guru perlu memastikan apakah peserta didik memahami apa yang ditanyakan oleh guru tersebut. Kata “pola” digunakan secara berbeda dalam kehidupan sehari-hari misalnya pola baju, pola bangunan, gambar yang dipakai untuk contoh batik, corak kain, potongan kertas

yang digunakan sebagai model baju, dan seterusnya. Istilah pola dalam suatu barisan bilangan mempunyai makna yang lebih spesifik yaitu bentuk (struktur) yang tetap. Oleh karena itu, soal seperti pada Gambar 1a sebaiknya diganti menjadi Gambar 1b, jika peserta didik diminta memprediksi banyak potongan lidi yang digunakan untuk rumah lainnya. Meskipun pada Gambar pertama, penggunaan kata pola tidak salah, namun pola yang dimaksudkan di sini adalah suatu “*bentuk (struktur) yang tetap*”.



Gambar 1a



Gambar 1b

Pada kedua contoh tugas di atas, guru perlu memodelkan penggunaan bahasa yang relevan dengan pola bilangan. Beberapa istilah matematika yang penting dalam hal ini antara lain barisan bilangan, unsur dari suatu barisan, suku pertama, tiga suku pertama, suku ke “sekian” dan “sekian” suku pertama, selisih antara dua suku berurutan.

Aspek bahasa sangat terkait dengan pengalaman. Dengan mengangkat permasalahan matematika yang dapat dimaknai oleh para peserta didik, maka lebih besar kemungkinan bagi mereka untuk berbicara satu sama lain. Namun jika masalah yang diberikan sama sekali baru dan sulit dipahami, mungkin akan mengakibatkan anak terdiam. Demikian juga sebaliknya, jika masalah yang diberikan terlalu mudah, maka anak mungkin akan berteriak menjawab secara serentak tanpa belajar sesuatu hal baru.

Mengacu pada kerangka kerja ELPSA, guru perlu mempersiapkan secara eksplisit contoh-contoh pernyataan atau penjelasan dari matematika, contoh-contoh pertanyaan yang akan diajukan oleh guru pada waktu diskusi kelompok atau pun diskusi kelas. Persiapan ini akan memfokuskan perhatian guru pada matematika yang akan dipelajari di kelas.

Pictorial

Guru perlu mempertimbangkan gambar apa atau alat peraga apa yang dapat lebih efektif digunakan untuk memancing peserta didik berpikir tentang pola yang mungkin dari susunan obyek yang diberikan, mendorong mereka untuk membuat suatu generalisasi tentang pola bilangan, mengajukan alasan yang masuk akal, dan bisa menjadi batu loncatan bagi peserta didik untuk menyatakan pola dalam bentuk simbol (komponen “S” dari ELPSA).

Penyajian informasi dalam bentuk *pictorial* dapat menjadi pemancing bagi peserta didik untuk mengekspresikan pengalamannya (Lowrie & Diezmann, 2009). Misal memberi masalah seperti pada Tugas 2 di atas yang menuntut peserta didik menginterpretasi gambar yang

diberikan. Ini disebut dengan *encode*. Demikian sebaliknya, yaitu proses *decode* di mana peserta didik diberi permasalahan dalam bentuk kata-kata (seperti pada Tugas 3) dan peserta didik perlu menginterpretasi masalah tersebut dan menyajikannya dalam bentuk sketsa, diagram atau gambar-gambar. Peserta didik perlu diberi kesempatan menggunakan cara mereka sendiri dan membandingkan caranya dengan cara peserta didik lainnya.

Tugas 3: Kartu ucapan perpisahan

Pada acara perpisahan suatu kelas yang terdiri dari 38 siswa, mereka sepakat bahwa untuk setiap siswa harus memberikan kartu ucapan perpisahan kepada setiap siswa lainnya. Ada berapa banyak kartu yang dipertukarkan dalam kelas tersebut?

Jadi dengan Tugas 3, peserta didik dipancing untuk mencari pola dan menjelaskan jalan berpikirnya. Masalah matematika tersebut dapat dikerjakan dalam kelompok kecil sehingga setiap mereka mendapat kesempatan yang lebih banyak untuk mengekspresikan gagasannya. Selama diskusi, jika peserta didik mengalami kesulitan, maka guru dapat membantu mereka, misalnya dengan bertanya: Apa yang berubah pada gambar selanjutnya? Bagaimana Anda yakin bahwa dugaanmu tepat? dan lain-lain. Pada diskusi kelas, guru tidak harus meminta setiap kelompok untuk mempresentasikan jawaban, tetapi dapat memfokuskan perhatian pada cara-cara yang berbeda yang muncul. Tujuannya mereka dapat belajar dari strategi yang berbeda, dan dapat menyimpulkan strategi terbaik bagi diri mereka.

Simbol

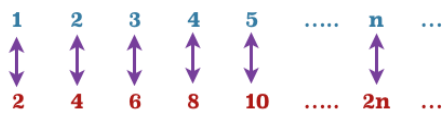
Matematika dikenal dengan dunia simbol. Sebagai contoh " $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ " menyimbolkan jumlah ukuran sudut pada sebarang segitiga ABC adalah 180 derajat. Contoh lain " $U_n = 2 + n$ " menyimbolkan suku ke "sekian" dari suatu barisan bilangan genap adalah 2 ditambah "sekian". Simbol adalah bahasa matematika yang padat isi dan bersifat universal, sehingga bisa dipahami oleh penduduk dunia yang mempunyai bahasa daerah yang berbeda-beda. Simbol dapat merupakan bahasa hasil kesepakatan, sehingga bentuk kesepakatan itu juga perlu dikenalkan kepada para peserta didik.

Dalam kaitan pola bilangan, salah satu tantangan berpikir matematika adalah menentukan unsur-unsur barisan bilangan yang sulit ditentukan dengan cara menghitung satu persatu. Akibatnya, penyelesaian masalah tersebut menuntut peserta didik membuat aturan umum yang bisa diperlakukan secara mudah untuk setiap kasus. Dengan kata lain, Di SMP, permasalahan bukan lagi menentukan 3 suku dari barisan 2, 4, 6, ... dan menentukan suku tertentu yang sulit ditemukan dengan mendaftar satu persatu. Dalam hal ini menuntut generalisasi atau bentuk umum secara simbolik.

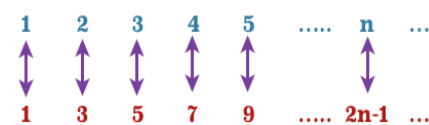
Sebagai contoh pada Tugas 1, peserta didik mungkin mengenali bahwa itu adalah barisan bilangan genap. Mereka dapat menentukan 10 unsur berikutnya dengan menggunakan

pola yang telah ditemukan (yaitu menambahkan dua pada suku tertentu untuk mendapatkan suku berikutnya. Namun, mereka akan mengalami kesulitan untuk menentukan suku ke-999.

Hal mendasar yang harus diketahui bahwa barisan bilangan ini merupakan suatu relasi antara bilangan asli dan unsur-unsur barisan tersebut seperti digambarkan dalam diagram berikut, namun pada saat penyajian barisan tersebut, bilangan asli yang dimaksud tidak tampak oleh peserta didik. Artinya, ketika mereka dibantu memahami ini, bahasa yang digunakan harus eksplisit, yaitu “suku ke- n ”.



Gambar 2a



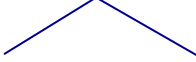
Gambar 2b

Dengan melihat hubungan tersebut, peserta didik diharapkan dapat menyimpulkan bahwa masing-masing suku barisan pada Gambar 2a merupakan hasil perkalian antara bilangan asli dan 2. Jadi suku ke-100 adalah 100×2 ; suku ke-999 adalah 999×2 . Dengan demikian suku ke- n adalah $n \times 2$ atau $2n$. Demikian juga dengan Gambar 2b, pola umum yaitu $2n + 1$, dengan n adalah bilangan asli, atau dengan aturan lain yaitu $2n + 1$ dengan n adalah bilangan cacah.

Peserta didik dapat diminta memperhatikan karakteristik dari tiga gambar pada Tugas 2 di atas dan mengeksplorasi pola pada gambar-gambar tersebut untuk menentukan banyak lidi yang diperlukan dalam membuat Gambar ke-30. Awalnya mereka mungkin akan kesulitan sehingga dapat disarankan untuk mencoba Gambar yang ke-6. Berikan kebebasan pada mereka menemukan jawaban dengan caranya sendiri. Tujuan akhirnya mereka dapat menemukan pola umum yang berbentuk simbol seperti pada Tabel 1.

Tabel 1. Metode penyelesaian masalah rumah

Metode	Ilustrasi
Mendaftar dengan tally	
Penjumlahan	Gambar 5: $6+5+5+5+5$ Gambar 6: $6+5+5+5+5+5=31$; Jadi, banyak lidi yang diperlukan pada Gambar ke-6 adalah 31
Mencari pola	Gambar 1: 6 lidi Gambar 2: $6+5 = 11$ lidi Gambar 3: $6+5+5 = 16$ lidi Gambar 4: $6+5+5+5 = 21$ Gambar 5: $6+5+5+5+5 = 26$ Bagaimana pola dari barisan 6, 11, 16, 21, ...? Selisih suatu suku dengan suku berikutnya adalah 5

Metode	Ilustrasi
Menggambar	<p>Jika pola itu dilanjutkan maka selisih Gambar k-5 dan ke-6 adalah 5. Jadi Gambar ke-6 adalah 31. Lalu bagaimana dengan Gambar ke-30?</p> <p>Gambar ke 2 ada satu 5 ditambah 6 Gambar ke-3 ada dua 5 lima ditambah 6 Gambar ke-4 ada tiga lima ditambah 6</p> <p>Jadi gambar ke-30 ada dua puluh sembilan 5 ditambah 6. Artinya $(29 \times 5) + 6 = 151$</p> 
Menggunakan rumus	$6+5(n-1); n=1, 2, 3, \dots$

Aplikasi

Apabila matematika akan dihubungkan dengan fenomena sehari-hari misalnya contoh pola dalam kehidupan sehari-hari seperti pada Gambar 3, contoh tersebut harus dicermati. Apakah penyajian contoh-contoh tersebut dapat berkontribusi secara signifikan pada tujuan utama pembelajaran. Guru perlu memperjelas ide-ide matematika apa yang hendak dibangun dari gambar-gambar tersebut.



Gambar 2a



Gambar 2b



Gambar 2c

Pemberian masalah yang menuntut penerapan pengetahuan dalam hal ini tentang pola bilangan, peserta didik belajar bernalar, mengemukakan pernyataan yang bersifat umum tentang suatu pola dan mengajukan alasan untuk menjustifikasi ketepatan alasan mereka. Dari proses belajar ini, peserta didik diharapkan dapat mengapresiasi bahwa matematika itu berkaitan dengan prediksi, matematika itu terstruktur dengan baik, dan penuh dengan pola. Proses pembelajaran pola bilangan yang dibangun atas kerangka dasar ELPSA diharapkan memberi fondasi yang kuat bagi peserta didik untuk belajar aljabar yang lebih kompleks.

Simpulan dan Saran

Sehubungan dengan tugas guru dalam membelajarkan siswa secara efektif, guru penting memiliki sebuah alat yang praktis dan mudah dipahami untuk merancang suatu pembelajaran

matematika bagi siswanya. Alat yang dimaksud bersesuaian dengan bagaimana seorang individu mengembangkan konsep matematika secara bermakna. Alat yang ditawarkan adalah kerangka kerja ELPSA.

Hingga saat ini ELPSA telah dikembangkan untuk konteks Indonesia. Bukti-bukti awal mengindikasikan bahwa kerangka kerja ini cukup menjanjikan dan meningkatkan kualitas pembelajaran matematika di Indonesia. Kelima komponen yang diajukan sangat penting untuk dipikirkan dalam proses perancangan pembelajaran matematika, jika mengharapkan peserta didik dapat memahami matematika secara lebih komprehensif. Selain itu, kerangka kerja ini diharapkan membantu guru untuk mengembangkan pembelajaran matematika secara lebih eksplisit dan pada gilirannya akan mengatasi masalah yang selama ini diidentifikasi dari sejumlah studi termasuk dari *video study*. Kerangka kerja ini diharapkan memperkaya referensi para guru Indonesia dalam upaya meningkatkan kualitas pembelajaran matematika di kelas.

Daftar Pustaka

- Adler, J. (1998). A Language of teaching dilemmas: Unlocking the complex multilingual secondary mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics*, 18(1), 24-33.
- Bishop, A. J. (1988a). The interactions of mathematics education with culture. *Cultural Dynamics*, 1(2), 145-157.
- Bishop, A. J. (1988b). Mathematics education in its cultural context. In A. J. Bishop (Ed.), *Mathematics Education and Culture* (pp. 179-191): Springer.
- Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 41-62.
- Chubb, I. (2014). Classroom maths irrelevant to workplace. Retrieved 3 June, 2015, from <http://www.couriermail.com.au/news/queensland/classroom-maths-irrelevant-to-workplace-says-professor-ian-chubb/story-fnn8dlfs-1227164607227>
- Cobb, P. (1988). The tension between theories of learning and instruction in mathematics education. *Educational Psychologist*, 23(2), 87.
- De Cruz, H., & De Smedt, J. (2013). Mathematical symbols as epistemic actions. *Synthese*, 190(1), 3-19. doi: 10.1007/s11229-010-9837-9
- Dienes, Z. P. (1959). The teaching of mathematics - - III: The growth of mathematical concepts in children through experience. *Educational Research*, 2(1), 9-28.
- Gravemeijer, K. (2010). Realistic mathematics education theory as a guideline for problem-centered, interactive mathematics education. *A decade of PMRI in Indonesia*. Bandung, Utrecht: APS International.
- Heuvel-Panhuizen, M. V. D. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 9-35.
- Jalal, F., Samani, M., Cahang, M. C., Stevenson, R., Ragatz, A. B., & Negara, S. D. (2009). *Teacher certification in Indonesia: A strategy for teacher quality improvement*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional, Republik Indonesia.

- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington: National Academy Press.
- Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge university press.
- Lerman, S. (2003). Cultural, Discursive Psychology: A Sociocultural Approach to Studying the Teaching and Learning of Mathematics Learning Discourse. In C. Kieran, E. Forman & A. Sfard (Eds.), (pp. 87-113): Springer Netherlands.
- Liebeck, P. (1984). *How children learn mathematics: A guide for parents and teachers*: Penguin.
- Lowrie, T. (1997). *EMM409 Module 1 Mathematical Thinking and Problem Solving*. Wagga Wagga, New South Wales: Charles Sturt University.
- Lowrie, T., & Diezmann, C. M. (2009). National numeracy tests: A graphic tells A thousand words. *Australian Journal of Education*, 53(2), 141-158.
- Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. United States of America: Cambridge University Press.
- Uttal, D. H., Scudder, K. V., & DeLoache, J. S. (1997). Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18(1), 37-54.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society : the development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press.
- Wenger, E. (1999). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*: Cambridge university press.
- Widjaja, W., Fauzan, A., & Dolk, M. (2010). The role of contexts and teacher's questioning to enhance students' thinking. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, 33(2), 168-186.
- World Bank. (2010). *Inside Indonesia's mathematics classrooms: A TIMSS video study of teaching practices and student achievement*. Jakarta: The World Bank Office Jakarta.